

گروه آموزشی : ریاضی

تاریخ : ۱۳۹۴/۲/۳

وقت : ۷۵ دقیقه



دانشکده ریاضی

امتحان میان ترم درس : ریاضی ۲- فنی (۱۳ گروه هماهنگ)

نیمسال (اول / دوم) ۱۳۹۴ - ۱۳۹۳

نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی :

نام مدرس :

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱ - رویه های $x^2 + y^2 + z - 2x + 4y = 4$ و $x + y + z = 1$ را در یک دستگاه مختصات

رسم کرده و اشتراک آنها را در شکل مشخص کنید. ۱۵ نمره

سوال ۲ - معادله دایره بوسان (دایره انحناء) منحنی $x = -y^2 + y$ در نقطه $(0, 1)$ را بنویسید. ۱۵ نمره

سوال ۳ - اگر بردار یکه قائم بر سطح $\cos x - x^2 y + e^{xz} + yz = 4$ در نقطه $(0, 1, 2)$ را \vec{u} بنامیم ، ۱۵ نمره

مقدار مشتق سویی تابع $f(x, y, z) = x^2 - yz + xz^2$ را در نقطه $(2, -1, 2)$ و در امتداد \vec{u} محاسبه کنید.

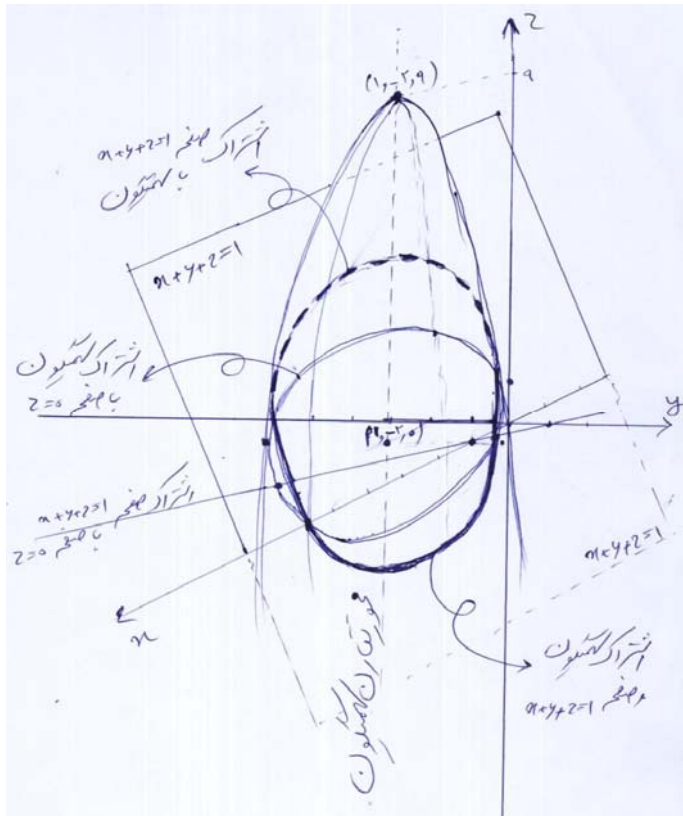
سوال ۴ - تابع $f(x, y)$ در معادله $f_{xx} + f_{yy} = 0$ صدق می کند.

اگر $g(u, v) = f(u^2 - v^2, 2uv)$ مقدار عبارت $g_{uu} + g_{vv}$ را محاسبه کنید. ۱۵ نمره

سوال ۵ - مقدار ماکزیمم نسبی تابع $f(x, y, z) = \ln x + \ln y + 3 \ln z$ را

روی سطح $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, $x, y, z > 0$ بیابید. ۱۵ نمره

موفق باشید



جواب سوال ۱: برای جواب به این سوال یک شکل تقریبی مانند شکل مقابل کفایت می کند اما برای تجسم بهتر شکل می توانیم به موارد زیر اشاره کنیم.

معادله رویه $x^2 + y^2 - 2x + 4y + z = 4$ را به صورت $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 - z$ می نویسیم.

این رویه یک سهمیگون دوار یکپارچه است و بالاترین نقطه آن نقطه $(1, -2, 9)$ است. اشتراک آن با صفحه xy

دایره $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ است که در شکل مقابل رسم شده است. اگر در دستگاه

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 - 2x + 4y + z = 4 \end{cases}$$

z را حذف کنیم داریم: $x^2 + y^2 - 3x + 3y = 3$ که معادله یک دایره است:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{15}{2}$$

این دایره که در شکل مقابل رسم نشده است،

تصویر مقطع صفحه $x + y + z = 1$ با سهمیگون

که یک منحنی بسته روی رویه است - بر روی صفحه xy است.

جواب سوال ۲:

قرار می دهیم $x = -t^2 + t$, $y = t$, $z = 0$ و در نتیجه $r(t) = (-t^2 + t, t, 0)$

$$r'(t) = (-2t + 1, 1, 0) \rightarrow r''(t) = (-2, 0, 0)$$

$$r'(1) = (-1, 1, 0) \rightarrow r''(1) = (-2, 0, 0) \rightarrow r'(1) \times r''(1) = (0, 2, 2)$$

$$|r'(1) \times r''(1)| = 2, \quad |r'(1)| = \sqrt{2} \rightarrow k(1) = \frac{2}{(\sqrt{2})^3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad R(1) = \sqrt{2}$$

$$T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{(-2t+1)^2 + 1}}(-2t+1, 1, 0)$$

$$\rightarrow T'(t) = \frac{2(-2t+1)}{(\sqrt{(-2t+1)^2 + 1})^3}(-2t+1, 1, 0) + \frac{1}{\sqrt{(-2t+1)^2 + 1}}(-2, 0, 0)$$

$$T'(1) = \frac{-2}{2\sqrt{2}}(-1, 1, 0) + \frac{1}{\sqrt{2}}(-2, 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1, 0) \quad N(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1, 0)$$

$$O(1) = r(1) + R(1)N(1) = (0, 1, 0) + \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1, 0) = (-1, 0, 0)$$

معادله دایره بوسان عبارت است از: $(x+1)^2 + y^2 = 2$

جواب سوال ۳: چون معادله رویه $\cos x - x^2 y + e^{xz} + yz = 4$ به صورت ضمنی داده شده است بردار قائم آن از رابطه $\text{grad}(\cos x - x^2 y + e^{xz} + yz - 4)$ به دست می آید.

$$\text{grad}(\cos x - x^2 y + e^{xz} + yz - 4) = (-\sin x - 2xy + ze^{xz}, -x^2 + z, xe^{xz} + y)$$

در نقطه $(0, 1, 2)$ بردار گرادیان برابر است با $(2, 2, 1)$ و در نتیجه $\vec{u} = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$

برای محاسبه مشتق سویی f ابتدا گرادیان آن را محاسبه می کنیم. $\nabla f(x, y, z) = (2x + z^2, -z, -y + 2xz)$ و در نتیجه $\nabla f(2, -1, 2) = (8, -2, 7)$ اکنون مقدار مشتق سویی خواسته شده برابر است با :

$$D_{\vec{u}} f(2, -1, 2) = (8, -2, 7) \cdot \frac{1}{3}(2, 2, 1) = \frac{19}{3}$$

جواب سوال ۴:

$$g_u = 2uf_x + 2vf_y \rightarrow g_{uu} = 2f_x + 4u^2 f_{xx} + 4uvf_{xy} + 4uvf_{yx} + 4v^2 f_{yy}$$

$$g_v = -2vf_x + 2uf_y \rightarrow g_{vv} = -2f_x + 4v^2 f_{xx} - 4uvf_{xy} - 4uvf_{yx} + 4u^2 f_{yy}$$

$$g_{uu} + g_{vv} = 4(u^2 + v^2)(f_{xx} + f_{yy}) = 0$$

جواب سوال ۵: برای استفاده از روش ضرایب لاگرانژ تابع $\varphi(x, y, z) = \ln x + \ln y + 3 \ln z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 5)$ را در نظر می گیریم. در نقاط اکسترمم نسبی باید داشته باشیم :

$$\varphi_x = \frac{1}{x} - 2\lambda x = 0, \quad \varphi_y = \frac{1}{y} - 2\lambda y = 0, \quad \varphi_z = \frac{3}{z} - 2\lambda z = 0, \quad \varphi_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0$$

$$x^2 = y^2 = \frac{z^2}{3} = \frac{1}{2\lambda} \rightarrow \frac{5z^2}{3} - 5 = 0 \rightarrow z = \sqrt{3}, \quad x = y = 1 \quad \text{یعنی}$$

اکنون داریم $f(1, 1, \sqrt{3}) = 3 \ln \sqrt{3} = \frac{3}{2} \ln 3$ و می توان دید که این مقدار ، ماکزیمم نسبی f است.

سیدرضا موسوی